МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учебно-методическое объединение по естественнонаучному образованию

УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель Министра образования Республики Беларусь
_____________ В.А.Богуш
«07» 07 2015г.
Регистрационный № ТД-G.522/тип.

Математический анализ
Типовая учебная программа по учебной дисциплине
для специальности
1- 31 03 04 Информатика

СОГЛАСОВАНО
Председатель Учебно-методического объединения по естественнонаучному образованию
_____________ А. Л. Толстик
«14» 10 2014 г.

СОГЛАСОВАНО
Начальник Управления высшего образования Министерства образования Республики Беларусь
_____________ С. И. Романюк
«07» 07 2015 г.

СОГЛАСОВАНО
Проректор по научно-методической работе Государственного учреждения образования «Республиканский институт высшей школы»
_____________ И. В. Титович
«___» _________ 2015 г.

Эксперт-нормоконтролер
_____________ О.Н. Величкович
«16» июня 2015 г.

Минск

СОСТАВИТЕЛИ:

О. А. Кастрица, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;
С. А. Мазаник, заведующий кафедрой высшей математики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»;
М.П. Дымков, заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ
Кафедрой высшей математики Белорусского государственного университета (протокол № 12 от 17 апреля 2014 г.);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета (протокол № 5 от 15 мая 2014 г.);

Научно-методическим советом по прикладной математике и информатике учебно-методического объединения по естественнонаучному образованию (протокол № 7 от 22 апреля 2014 г.).

Ответственный за редакцию: О.А. Кастрица

Ответственный за выпуск: С.А.Мазаник

Пояснительная записка

В соответствии с типовым учебным планом по специальности 1-31 03 04 «Информатика», учебная дисциплина «Математический анализ» относится к компоненту учреждения высшего образования.

Учебная дисциплина «Математический анализ» знакомит студентов со способами исследования функциональных зависимостей между переменными величинами. Изучаемые методы базируются на использовании предельного перехода, дифференциального и интегрального исчисления.

Основой для изучения математического анализа являются математические дисциплины, изучаемые в средней школе.

Математический анализ непосредственно связан с дисциплиной «Геометрия и алгебра». Методы, излагаемые в учебной дисциплине «Математический анализ», связаны с учебными дисциплинами «Дифференциальные уравнения», «Вычислительные методы алгебры», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Функциональный анализ и интегральные уравнения», «Методы численного анализа», «Методы оптимизации», «Уравнения математической физики», а также с рядом дисциплин специализации.

Цель преподавания учебной дисциплины «Математический анализ»: создание базы для освоения основных понятий и методов современной математики, используемых при изучении перечисленных выше дисциплин.

При изложении материала учебной дисциплины важно показать возможности использования аппарата анализа при решении прикладных задач, возникающих в различных областях науки, техники, экономики и др. Целесообразно выделить моменты построения математических моделей естественных процессов с целью их последующего изучения методами математического анализа, а также обратить внимание на алгоритмические аспекты получаемых результатов.

Основные задачи, решаемые при изучении учебной дисциплины «Математический анализ»:

– изучение студентами понятия числа;

– изучение понятия предельного перехода и освоение этого понятия с целью практического использования при решении задач математики, механики, математической физики, экономики;

– изучение основ дифференциального исчисления, использование элементов дифференциального исчисления при исследовании функций, решении экстремальных задач и других задач современной математики ее приложений;

– использование основ интегрального исчисления при решении математических и прикладных задач.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

– основные понятия и результаты дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных;

– методы доказательств и алгоритмы решения задач математического анализа;

уметь:

– использовать основные результаты математического анализа в практической деятельности;

– использовать теоретические и практические навыки применения дифференциального и интегрального исчисления в математике;

владеть:

– основными методами интегрирования и дифференцирования функций, рядов и интегралов;

– методами доказательств и аналитического исследования функций, рядов и интегралов на непрерывность, сходимость, равномерную сходимость;

– навыками самообразования и способами использования аппарата математического анализа для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Типовая учебная программа рассчитана на 784 часа, из них 408 часов аудиторных (примерное распределение по видам занятий: лекции - 204 часа, практические занятия - 204 часа).

Примерный тематический план дисциплины

Наименование раздела, темы	Количество аудиторных часов	
	Лекции	Практические занятия
1. Введение	2	
Раздел I. Функции одной действительной переменной		
2. Числа, числовые множества и числовые последовательности	10	10
3. Предел функции	4	8
4. Непрерывность	6	4
5. Дифференцируемость	8	10
6. Исследование функций	14	14
7. Неопределенный интеграл	12	12
8. Определенный интеграл	6	4
9. Приложения интеграла	6	6
Раздел II. Функции нескольких действительных переменных		
10. Функции нескольких переменных	4	2
11. Дифференцируемость функции нескольких переменных	6	6
12. Неявно заданные функции	4	4
13. Экстремум функций нескольких переменных	8	8
14. Кратные интегралы	12	12
15. Кривые и поверхности	4	4
16. Криволинейные и поверхностные интегралы	20	22
Раздел III. Ряды и несобственные интегралы		
17. Числовые ряды	10	14
18. Функциональные последовательности и ряды	8	8
19. Степенные ряды	6	8

20. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра	20	20
21. Ряды Фурье и интеграл Фурье	12	6
Раздел IV. Функции комплексной переменной		
22. Функции комплексного аргумента	4	4
23. Дифференцируемость ФКП	4	2
24. Интеграл от функции комплексного аргумента	6	8
25. Комплексные числовые и функциональные ряды	8	8
Всего часов	**408**	

Содержание учебного материала

1. Введение

Предмет математического анализа. Историческое развитие математического анализа, его место среди других математических наук и в естествознании.

Раздел I. Функции одной действительной переменной

2. Числа, числовые множества и числовые последовательности

Действительные числа. Критерий различия действительных чисел. Числовые множества. Отображения. Счетные и несчетные множества. Перестановки и сочетания. Формула Ньютона. Границы числовых множеств. Теорема о гранях.

Числовые последовательности. Бесконечно малые последовательности. Сходящиеся последовательности, их свойства. Сходимость монотонных последовательностей. Число "e". Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

3. Предел функции

Функция одной переменной. Предел функции в точке. Критерий Гейне. Критерий Коши существования конечного предела функции. Односторонние пределы. Бесконечные пределы и пределы на бесконечности.

4. Непрерывность

Непрерывность функции в точке. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва. Непрерывность монотонной функции. Непрерывность обратной функции и композиции функций. Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы. Сравнение функций. O-символика. Локальные свойства непрерывных функций. Функции, непрерывные на множестве. Достижение непрерывной на отрезке функцией своих экстремальных значений (теорема Вейерштрасса). Равномерная непрерывность функций. Теорема Кантора.

*5. **Дифференцируемость***

Дифференцируемость функции в точке. Производная. Геометрический и механический смысл производной. Правила дифференцирования. Производная обратной функции. Производная композиции функций. Производные основных элементарных функций. Дифференциал функции. Инвариантность формы первого дифференциала.

Использование производной и дифференциала в приближенных вычислениях.

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически.

Формула Тейлора. Различные способы представления остаточного члена. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Ряд Тейлора. Формулы Эйлера.

*6. **Исследование функций***

Стационарные точки функции. Теоремы Ферма, Ролля. Формула конечных приращений (теорема Лагранжа). Теорема Коши. Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей.

Монотонные дифференцируемые функции. Экстремумы. Необходимое условие экстремума. Исследование критических точек. Глобальный экстремум. Выпуклость функций. Асимптоты. Построение эскиза графика функций.

Понятие об итерационных алгоритмах приближенного вычисления корней уравнений.

*7. **Неопределенный интеграл***

Первообразная. Неопределенный интеграл. Первообразные основных элементарных функций. Замена переменных в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Неберущиеся интегралы. Существование элементарных первообразных у рациональных функций. Методы рационализации.

*8. **Определенный интеграл***

Определенный интеграл Римана. Критерий Коши интегрируемости функции. Интегрируемость непрерывной функции. Интегральное колебание. Необходимые и достаточные условия Дарбу интегрируемости в смысле Римана. Основные свойства определенного интеграла. Классы интегрируемых функций. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу. Формула Ньютона-Лейбница. Основные приемы вычисления определенного интеграла.

Понятие о других способах построения интеграла.

*9. **Приложения интеграла***

Длина дуги, площадь фигуры, объем тела, использование интегралов для их вычисления. Приложения интегралов в механике, физике, экономике и др.

Алгоритмы численного интегрирования. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Раздел II. Функции нескольких действительных переменных

10. Функции нескольких переменных

Пространство $\mathbf{R}^n$. Сходящиеся последовательности в $\mathbf{R}^n$. Принцип выбора. Критерий Коши сходимости последовательности в $\mathbf{R}^n$.

Функции нескольких переменных. Предел. Повторные пределы. Непрерывность. Непрерывность по одной из переменных. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность на множестве. Равномерная непрерывность.

11. Дифференцируемость функции нескольких переменных

Дифференцируемость в точке функции нескольких переменных. Частные производные. Условия дифференцируемости. Дифференциал. Дифференцирование композиции функций нескольких переменных. Инвариантность формы первого дифференциала.

Производные и дифференциалы высших порядков. Условия равенства смешанных производных. Оператор дифференцирования. Формула Тейлора.

12. Неявно заданные функции

Теорема о неявной функции.

Векторные функции n переменных. Непрерывность. Дифференцируемость. Производное отображение. Матрица Якоби. Дифференциал. Дифференцирование композиции. Теорема о неявной векторной функции. Зависимость функций.

13. Экстремум функций нескольких переменных

Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые условия. Исследование стационарных точек. Условный экстремум. Функция Лагранжа. Глобальный экстремум.

14. Кратные интегралы

Интеграл Римана функции двух и трех переменных. Критерии Коши и Дарбу интегрируемости. Основные свойства интеграла. Классы интегрируемых функций. Замена переменных в кратных интегралах. Использование полярных, цилиндрических и сферических координат при вычислении интегралов.

Использование кратных интегралов при решении геометрических, физических и других прикладных задач.

15. Кривые и поверхности

Кривые на плоскости и в пространстве. Векторное задание кривой. Трехгранник Френе. Кривизна и кручение. Поверхности. Векторное задание поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Касательная плоскость и нормаль. Односторонние и двухсторонние поверхности. Понятие многообразия.

16. Криволинейные и поверхностные интегралы

Криволинейные интегралы первого и второго рода. Формула Грина. Условия Эйлера. Использование формулы Ньютона-Лейбница для вычисления криволинейных интегралов.

Поверхностные интегралы первого и второго рода. Формула Стокса. Формула Остроградского.

Использование криволинейных и поверхностных интегралов при решении прикладных задач.

Раздел III. Ряды и несобственные интегралы

17. Числовые ряды

Числовой ряд. Критерий Коши сходимости ряда. Положительные ряды. Сравнение положительных рядов. Признаки сходимости (Коши, Даламбера, интегральный, Гаусса и др.). Знакопеременные ряды. Признаки Лейбница, Дирихле и Абеля. Абсолютная сходимость. Действия над рядами. Двойные и повторные ряды.

Понятие о других способах суммирования рядов.

18. Функциональные последовательности и ряды

Сходимость функциональных последовательностей. Равномерная сходимость. Критерии равномерной сходимости.

Функциональные ряды. Равномерная сходимость функционального ряда. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

Функции, определяемые как суммы рядов. Предельный переход. Непрерывность. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов.

19. Степенные ряды

Степенной ряд. Теорема Абеля. Множество сходимости степенного ряда. Радиус сходимости. Свойства суммы степенного ряда. Представление функций степенными рядами. Ряд Тейлора.

Основные степенные разложения и их приложения.

20. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра

Функции, определяемые как интегралы, зависящие от параметра. Предельный переход. Непрерывность. Дифференцируемость. Правило Лейбница. Интегрирование.

Несобственные интегралы первого и второго рода. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов первого и второго рода. Несобственные интегралы от положительных функций. Признаки сравнения. Степенной признак сходимости несобственных интегралов. Абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля. Главное значение несобственного интеграла.

Функции, определяемые как несобственные интегралы, зависящие от параметра. Предельный переход. Дифференцирование. Интегрирование.

Эйлеровы интегралы первого и второго рода. Их основные свойства. Интеграл Пуассона. Интеграл Дирихле. Интегралы Лапласа. Интегралы Фруллани.

21. Ряды Фурье и интеграл Фурье

Скалярное произведение функций. Ортогональные системы функций. Тригонометрические многочлены. Ряд Фурье. Неравенство Бесселя. Ряд Фурье четной и нечетной функции.

Принцип локализации. Теорема Римана-Лебега. Сходимость ряда Фурье в точке.

Равномерная сходимость ряда Фурье. Сходимость в среднем. Равенство Парсеваля. Полнота и замкнутость тригонометрической системы.

Обобщенное равенство Парсеваля. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов Фурье.

Разложение функций в ряды Фурье. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленами.

Интеграл Фурье. Преобразование Фурье.

Раздел IV. Функции комплексной переменной

22. Функции комплексного аргумента

Множества на комплексной плоскости. Бесконечно удаленная точка. Окрестность точки. Сфера Римана. Функции комплексной переменной (ФКП). Предел и непрерывность ФКП. Основные теоремы о сходящихся и непрерывных ФКП.

Линейная и степенная функции. Экспонента. Многозначные функции. Логарифм комплексного числа. Логарифмическая функция. Тригонометрические и гиперболические функции.

23. Дифференцируемость ФКП

Дифференцируемость. Условия Коши-Римана. Свойства дифференцируемых ФКП. Геометрический смысл производной. Конформнрость. Гармонические функции.

24. ***Интеграл от функции комплексного аргумента***

Интеграл ФКП. Вычисление интеграла. Теорема Коши. Первообразная ФКП. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем.

25. Комплексные числовые и функциональные ряды

Последовательности комплексных чисел. Основной критерий сходимости комплексных последовательностей.

Ряды с комплексными элементами. Степенные ряды. Регулярные функции. Связь с дифференцируемостью. Условия регулярности. Теоремы Вейерштрасса. Нули регулярной функции. Теорема единственности. Аналитическое продолжение.

Информационно-методическая часть

Литература

Основная

1. Богданов Ю.С. Лекции по математическому анализу. – Мн.: изд-во БГУ, 1974, 1978. – Ч.1-2.

2. Богданов Ю.С., Кастрица О.А., Сыроид Ю.Б. Математический анализ. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 351с.

3. Зорич В.А. Математический анализ.– М.: Наука, 1997, 1998. – Ч.1-2

4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. – М.: изд-во Моск. ун-та, 1985, 1987. – Ч.1-2.

5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа.– М.: Высш. шк.: 1988, 1988,1989.– Т.1-3.

6. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1989. – 408с.

7. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1997. – 720с.

8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1998. – 624с.

9. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981. – 303с.

Дополнительная

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1982, 1980. – Ч.1-2.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 623с.

3. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. – М.: Наука, 1984. – 592с.

4. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды. – М.: Наука, 1986. – 528с.

5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. – М.: Наука, 1994. – 496с.

6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688с.

7. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1990. – Т.1-2.

8. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1979. – 319с.

9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1997. – Т.1-3.

10. Богданов Ю.С., Кастрица О.А. Начала анализа в задачах и упражнениях. – Мн.: Вышэйшая шк., 1988. – 179с.

11. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы. – Мн.: Вышэйшая шк., 1995. – 380с.

Диагностика компетенций студента

Условия для самостоятельной работы студентов, в частности, для развития навыков самоконтроля, способствующих интенсификации учебного процесса, обеспечиваются наличием и полной доступностью электронных (и бумажных) учебно-методических пособий по основным разделам дисциплины.

Текущий контроль усвоения знаний рекомендуется осуществлять в виде проверки домашних заданий, контрольных работ, проведения коллоквиумов.